AGRÉGATION de MATHÉMATIQUES EXTERNE

SESSION DE 1990 — CONCOURS EXTERNE

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES
DURÉE : 6 heures

Un corrigé

I

Questions utiles pour la suite du problème

A. Décomposition d'un élément de (E)

1. (a) Il est clair que f_u est un endomorphisme de E. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$(f_u(x)|y) = ((u|x)u|y) = (x|f_u(y)),$$

de plus pour tout $x \in E$,

$$(x|f_u(x)) = (x|(u|x)u) = (u|x)^2 \geq 0,$$

donc $f_u \in \mathscr{S}^+(E)$.

(b) On a $\mathbf{Im}\, f_u \subset \mathbb{R}u$ et $f_u(u) = \|u\|^2 u \neq 0$, donc $\mathbf{Im}\, f_u = \mathbb{R}u = \mathrm{Vect}(u)$ et par conséquent $\mathrm{rg}\, f_u = 1$.

(c) Si $\|u\| = 1$, f_u est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$.

(d) Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormale de E et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de f_u dans cette base. Posons $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, on a, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $a_{ij} = (e_i|f_u(e_j)) = u_j u_j$, c'est-à-dire $A = UU^*$.

2. Si $uu^* = vv^*$, alors on aura pour tout $x \in E$, $(u|x)u, = (v|x)v$, donc v et u sont colinéaires. Inversement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$, alors la condition $uu^*(u) = vv^*(u)$ entraine $\lambda^2 = 1$. Ainsi $vv^* = uu^*$ si, et seulement si, $v = u$ où $v = -u$.

3. f étant symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, les valeurs propres de f telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda e_i$. Posons $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^*$, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

$$g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i|e_j) e_i = \lambda_j e_j = f(e_j).$$

D'où $f = g$ et donc

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^* \tag{1}$$

De plus $f \in \mathscr{S}^+(E)$ si, et seulement si, $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

4. Si $f = 0$, alors pour tout $x \in E$, $(x|f(x)) = 0$. Inversement, on sait que

$$(f(x)|y) = \frac{1}{2}\left[(f(x+y)|x+y) - (f(x)|x) - (f(y)|y)\right],$$

ainsi si $(f(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$, alors on aura $(f(x)|y) = 0$ pour tout $y \in E$ et donc f est nul.

5. Il est évident que si $f(x) = 0$, $(x|f(x)) = 0$. Maintenant, si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors d'après (1) $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et donc $(x|f(x)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = 0$, ce qui entraîne que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et donc $f(x) = 0$.

6. Si $f \in \mathscr{S}^*(E)$, alors $\lambda_i \geq 0$. Posons donc $u_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$, alors on vérifie facilement que $f = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*$.

B. Caractérisation des éléments de $\mathscr{B}(E)$ et $\mathscr{C}(E)$

1. (a) Soit $x \in E$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que

$$(f(x)|f(x)) = (x|f^*f(x)) \leq \|x\|\|f^*f(x)\|$$

et on aussi

$$\|f^*f(x)\| \leq \|f^*\|\|f(x)\|,$$

donc $\|f(x)\|^2 \leq \|f^*\|\|f(x)\|\|x\|$.
Si $f(x) = 0$, l'inégalité est toujours vérifiée, si $f(x) \neq 0$, alors $\|f(x)\| \leq \|f^*\|\|x\|$.

(b) L'inégalité précédente montre que $\|f\| \leq \|f^*\|$ et en remplaçant f par f^* on obtient $\|f^*\| \leq \|(f^*)^*\| = \|f\|$, d'où $\|f^*\| = \|f\|$.

2. (a) On a d'une manière évidente donc $ff^* \in \mathscr{S}^+(E)$ car $(f^*f)^* = f^*f$, et pour tout $x \in E$, $(x|f^*f(x)) = \|f(x)\|^2 \geq 0$,

(b) Il est clair que $\mathbf{Id_E} - f^*f \in \mathscr{S}(E)$. Si de plus $f \in \mathscr{B}(E)$, alors $\|f\| \leq 1$ et donc pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$, mais

$$((\mathbf{Id_E} - f^*f)(x)|x) = (x|x) - (f(x)|f(x)) = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2 \geq 0,$$

donc $\mathbf{Id_E} - f^*f \in \mathscr{S}^+(E)$.
Réciproquement, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathbf{Id_E} - f^*f \in \mathscr{S}^+(E)$, alors pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 - \|f(x)\|^2 \geq 0$$

et donc $\|f(x)\| \leq \|x\|$, soit donc $\|f\| \leq 1$ et par conséquent $f \in \mathscr{B}(E)$.

3. (a) Soit $f \in \mathscr{B}(E)$, alors $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq 1$, mais $E_f \neq \varnothing$, alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que $\|f(x_0)\| = \|x_0\|$ et par conséquent $\|f\| = 1$.
Réciproquement, si $\|f\| = 1$ et comme la borne supérieure est atteinte, alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que $\dfrac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1$, donc E_f est non vide.

(b) Soit $x \in \ker(\mathbf{Id_E} - f^*f)$, alors $f^*f(x) = x$ et donc $(f^*f(x)|x) = (x|x)$, c'est-à-dire

$$\|f(x)\|^2 = \|x\|^2,$$

donc $x \in E_f$.
Réciproquement, soit $x \in E_f$, alors $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ ou encore

$$(x|x) - (f^*f(x)|x) = ((\mathbf{Id_E} - f^*f)(x)|x) = 0,$$

alors d'après la question **5.** de la partie **I.A**, $(\mathbf{Id_E} - f^*f)(x) = 0$ et donc $x \in \ker(\mathbf{Id_E} - f^*f)$. D'où l'égalité $E_f = \ker(\mathbf{Id_E} - f^*f)$.
Le même raisonnement se fait pour montrer l'égalité $E_f^* = \ker(\mathbf{Id_E} - ff^*)$.

(c) Soit $x \in E_f$, alors $f(x) - ff^*(f(x)) = f(x - f^*f(x)) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in E_f^*$, d'où $f(E_f) \subset E_f^*$.
D'autre part, soit $y \in E_f^*$, alors $y = f(f^*(y))$ et on a aussi

$$f^*(y) - f^*(ff^*(y)) = f^*(y - ff^*(y)) = f^*(0) = 0,$$

donc $y \in f(E_f))$. D'où $f(E_f) = E_f^*$.
Considérons maintenant l'application linéaire g, restriction de f à E_f :

$$\begin{array}{rccc} g : & E_f & \to & E_f^* \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

cette application est surjective (d'après ce qui précède) et si $x \in \ker g$, alors $0 = \|g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 = \|x\|^2$, et donc $x = 0$, l'application g est donc bijective et par conséquent $\dim(E_f) = \dim\left(E_f^*\right)$.
Grâce à la symétrie des rôles de f et f^*, on montre exactement de la même manière que $f^*(E_f^*) = E_f$.

4. Il suffit de remarquer que f et f^* ont même norme subordonnée, même rayon spectrale et que $\mathrm{rg}(\mathbf{Id_E} - f^*f) = \mathrm{rg}(\mathbf{Id_E} - ff^*)$ (la question **3.(c)** de cette partie)

5. i⇒ii Soit $f \in \mathscr{C}(E)$, alors $f \in \mathscr{B}(E)$ et $\mathrm{rg}(\mathbf{Id_E} - f^*f) \leq 1$, donc si $\mathrm{rg}(\mathbf{Id_E} - f^*f) = 0$, alors pour tout $x \in E$, $f(x) = x$, il suffit donc de prendre $u = 0$, si $\mathrm{rg}(\mathbf{Id_E} - f^*f) = 1$, la question **6.** de la partie **I.A**, montre qu'il existe un vecteur u non nul tel que $\mathbf{Id_E} - f^*f = uu^*$.

ii⇒iii Pour tout $x \in E$, on peut écrire :

$$(x - f^*f(x)|x) = (x|u)^2 = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2.$$

iii⇒i La relation $(x - f^*f(x)|x) = (x|u)^2 = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2$, s'écrit encore $((\mathbf{Id_E} - f^*f - f_u)(x)|x)$ et ceci pour tout $x \in E$, donc $\mathbf{Id_E} - f^*f - f_u = 0$, donc $\mathrm{rg}(\mathbf{Id_E} - f^*f) = \mathrm{rg}\, f_u \leq 1$ et pour tout $x \in E$ on a $\|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = (u|x)^2 \geq 0$ et donc $\|f(x)\| \leq \|x\|$ ou encore $\|f\| \leq 1$.

C. Propriétés des matrices compagnons

Soit $P = T^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k$ un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[T]$. M désigne la matrice compagnon de P, c'est la matrice $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrons, par récurrence sur n, que $\chi_C = P$.
Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, montrons le au rang n. En développant par rapport à la première ligne, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\chi_C(t) = \det(tI_n - C) = \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & t & & 0 & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & t & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t - a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$t \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & t & & 0 & -a_2 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & t & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t - a_{n-1} \end{vmatrix} - a_0 \begin{vmatrix} -1 & t & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & t \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

et donc d'après l'hypothèse de récurrence

$$\chi_C(t) = t(t^{n-1} - a_{n-1}t^{n-2} - ... - a_1) + a_0 = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - ... - a_1 t - a_0 = P(t).$$

D'où $\chi_C = P$.
Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $C^i e_1 = e_{i+1}$. Donc les vecteurs colonnes $\left\{ e_1, Ce_1, ..., C^{n-1}e_1 \right\}$ sont linéairement indépendants, on en déduit qu'il n'existe pas de polynôme Q non nul de degré strictement inférieure à n et tel que $Q(A)e_1 = 0$. Mais on sait que χ_C annule C (théorème de Cayley-Hamilton), donc le polynôme minimal π_C est

$$\pi_C = \chi_C = T^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k = P.$$

II

1. Si $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \nu & \mu\end{pmatrix}$, on a $I_n - A^*A = \begin{pmatrix}1-\lambda^2-\nu^2 & \mu\nu\\ \mu\nu & 1-\mu^2\end{pmatrix}$ et le fait que $A \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$ implique que $\det(I_n - A^*A) = 0$, ce qui s'écrit exactement $\nu^2 = (1-\lambda^2)(1-\mu^2)$.
Les valeurs propres de A sont λ et μ, et le fait que $\|A\| \leq 1$ implique que $|\lambda| \leq 1$ et $\mu \leq 1$ (il suffit de considérer des vecteurs propres). Donc il existe deux réels β et β tels que $\alpha = \cos\alpha$ et $\mu = \cos\beta$. L'égalité qu'on vient d'obtenir s'écrit donc $\nu^2 = \sin^2\alpha \sin^2\beta$, et quitte à changer le signe de α ou de β, on est sûr de pouvoir écrire $\nu = -\sin\alpha\sin\beta$.
Réciproquement, une matrice $A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & 0\\ -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ vérifie

$$I_2 - A^*A = \begin{pmatrix}\sin^2\alpha\cos^2\beta & \sin\alpha\sin\beta\cos\beta\\ \sin\alpha\sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta\end{pmatrix} = UU^*$$

où $U = \begin{pmatrix}\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$. On a donc prouvé que $A \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$ (d'après I.B.5.ii) et on a trouvé un vecteur U qui convient.

2. Si $I_n - A^*A = UU^*$, comme $A \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, donc $\|A\| \leq 1$ et nécessairement $|a_{nn}| \leq 1$. On peut donc trouver $\theta_n \in \mathbb{R}$ tel que $a_{nn} = \cos(\theta_n)$. L'égalité $I_n - A^*A = UU^*$ s'écrit donc

$$\begin{pmatrix}I_{n-} - B^*B - CC^* & -a_{nn}C\\ -a_{nn}C^* & 1-a_{nn}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}WW^* & b_nW\\ b_nW^* & b_n^2\end{pmatrix}$$

D'où les conditions $a_{nn} = \cos(\theta_n)$, $b_n = \sin(\theta_n)$ (quitte à changer le signe de θ_n), ainsi que $-\cos(\theta_n)C = \sin(\theta_n)W$ et $I_{n-1} - B^*B - CC^* = WW*$.
$\cos(\theta_n)$ et $\sin(\theta_n)$ n'étant pas simultanément nuls une des deux égalités suivantes a un sens :

$$V = -\frac{1}{\sin(\theta_n)}C,\ \ V = \frac{1}{\cos(\theta_n)}W$$

et dans les deux cas, on déduit l'autre égalité de $-\cos(\theta_n)C = \sin(\theta_n)W$, donc on a trouvé V tel que $C = -\sin(\theta_n)V$ et $W = \cos(\theta_n)V$.
La dernière égalité s'écrit donc

$$I_{n-1} - B^*B - \sin^2(\theta_n)VV^* = \cos^2(\theta_n)VV^* \Leftrightarrow I_{n-1} - B^*B = VV^*.$$

Réciproquement, si θ_n et V existent et vérifient les 5 égalités, en calculant $I_n - A^*A$ et UU^* on trouve facilement que ces deux matrices sont toutes 2 égales à

$$\begin{pmatrix}\cos^2(\theta_n)VV^* & \sin(\theta_n)\cos(\theta_n)V\\ \sin(\theta_n)\cos(\theta_n)V^* & \sin^2(\theta_n)\end{pmatrix}$$

3. Soit $\lambda_i = \cos(\theta_i)$ pour $1 \leq i \leq n$ les n valeurs propres imposées. Le résultat de la question précédente décrit la manière d'augmenter d'une unité la dimension d'une matrice carrée répondant au problème posé. On peut procéder ainsi.
On construit la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ en même temps que le vecteur $U = (u_i)_{1\leq i\leq n}$. (1ère étape) :
$a_{11} := \cos(\theta_1)$; $u_1 := \sin(\theta_1)$
Faire pour k de 1 à $n-1$
($(k+1)$ ème étape : on a déjà calculé a_{ij} et u_i pour $1 \leq j \leq i < k$).
$a_{k+1,k+1} := \cos\theta_{k+1}$; $u_{k+1} := \sin(\theta_{k+1})$;
Pour i de 1 à k faire
$a_{k+1,i} := -\sin(\theta_{k+1} * u_i$; $u_i := \cos(\theta_{k+1} * u_i$;
fin de faire (pour i) ;
fin de faire (pour k).

En appliquant cet algorithme pour les premières valeurs de n, on se rend compte qu'une matrice A est nécessairement de la forme
$a_{ii} = \cos(\theta_i)$, $a_{i+1,i} = -\sin(\theta_i)\sin(\theta_{i+1})$, $a_{i+2,i} = -\sin(\theta_i)\cos(\theta_{i+1}\sin(\theta_{i+2})$,...
$a_{ji} = -\sin(\theta_i)\cos(\theta_{i+1})\cos(\theta_{i+2})... \cos(\theta_{j-1}\sin(\theta_j)$, Et de la même manière on s'aperçoit que U est nécessairement de la forme
$u_n = \sin(\theta_n)$, $u_{n-1} = \cos(\theta_n)\sin(\theta_{n-1})$, $u_{n-2} = \cos(\theta_n)\cos(\theta_{n-1})\sin(\theta_{n-2})$, ...
$u_i = \cos(\theta_n)\cos(\theta_{n-1})... \cos(\theta_{i+1}\sin(\theta_i)$.
Pour établir cette propriété, il suffit de raisonner par récurrence sur n, la propriété étant clairement vraie aux premiers ordres, et l'enchaînement est une conséquence immédiate de l'algorithme qu'on vient d'écrire.

III

Étude de $\mathscr{B}(E)$ et de $\mathscr{C}_0(E)$

A. Décomposition d'un élément de $\mathscr{B}(E)$

1. (a) Soient $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^*f(f^k(x)) = f^k(x)$ et $f^*f(f^k(y)) = f^k(y)$, donc

$$f^*f(\lambda f^k(x) + \mu f^k(y)) = f^*f(f^k(\lambda x + \mu y)) = \lambda f^k(x) + \mu f^k(y) = f^k(\lambda x + \mu y),$$

donc $\lambda x + \mu y \in F$ et par conséquent est un sous-espace vectoriel de E.
Autrement, $F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (f^k)^{-1}(E_f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit $x \in F$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f^{k+1}(x)\| = \|f^k(x)\|$, donc $f^k(x) \in E_f$ et ceci pour tout k, donc $f(F) \subset F$.
Si $x \in \ker f \cap F$, alors $\|f(x)\| = \|x\| = 0$, donc la restriction de f à F est bijective, donc $f(F) = F$.
Soit $x \in F$, $x \in E_f$, donc $F \subset E_f$, en utilisant les notations de la question **3.(c)** de la partie **I.B**, on a $f^*(F) = f^*f(F)$, donc $f^*(F) = F$.

(c) $f^*(F) \subset F \Rightarrow f(G) \subset G$.

2. (a) Il est clair que $\|\psi\| \leq \|f\| \leq 1$, car $f \in \mathscr{B}(E)$, donc $\psi \in \mathscr{B}(G)$.

(b) La restriction φ de f à F est un isomorphisme, de plus pour tout $x \in F$,

$$\|\varphi(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|,$$

donc φ est orthogonal, c'est-à-dire $\varphi \in \mathscr{O}(F)$.

(c) Soit $x \in E$ tel que $x \notin F$, donc l'ensemble $\varepsilon = \left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, f^k(x) \notin E_f \right\}$ est non vide, soit donc k le plus petit entier tel que $f^k(x) \notin E_f$, donc on a :

$$\|x\| = \|f(x)\| = ... = \|f^k(x)\| \neq \|f^{k+1}(x)\|$$

Supposons que la famille $\{x, f(x), ..., f^k(x)\}$ soit liée, soit l le plus petit entier tel que $\{x, f(x), ..., f^l(x)\}$ soit liée, donc $f^l(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), ..., f^{l-1}(x))$ et par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, $f^i(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), ..., f^{l-1}(x))$ en particulier $f^k(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), ..., f^{l-1}(x)) \subset E_f$ ce qui est absurde. Donc la famille $\{x, f(x), ..., f^k(x)\}$ est libre.
D'autre part donc $k + 1 \leq n$ ou encore $k < n$ ($n = \dim E$). Or pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\|f^{i+1}(x)\| \leq \|f\|\|f^i(x)\| \leq \|f^i(x)\|,$$

car $\|f\| \leq 1$, d'où :

$$\|f^n(x)\| \leq \|f^{n-1}(x)\| \leq ... \leq \|f^{k+1}(x)\| < \|f^k(x)\| = \|x\|.$$

Ainsi $\|f^n(x)\| < \|x\|$.

(d) Si $G=\{0\}$ le résultat est évident.
Si $G\neq\{0\}$. Soit $x\in G$ alors $x\notin F$ puisque $F\cap G=\{0\}$. D'après ce qui précède

$$\|\psi^n(x)\|=\|f^n(x)\|<\|x\|,$$

donc $\|\psi^n\|\leq 1$.
Si $\|\psi^n\|=1$, alors il existe $x_0\in G$ tel que $\|\psi^n(x_0)\|=\|x_0\|$, ceci est absurde car pour tout $x\in G$, $\|\psi^n(x)\|<\|x\|$, donc $\|\psi^n\|<1$ et donc $\rho(\psi)<1$ et comme $\|\psi\|\leq\|f\|\leq 1$, ainsi $\psi\in\mathscr{B}_o(G)$.

3. i⇒iii Soit $x\in E\setminus\{0\}$, $\rho(f)<1$ implique qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\|f^k\|<1$, donc $\|f^k(x)\|<\|x\|$, donc $x\notin F$ et $F=\{0\}$, donc i implique iii.

iii⇒ii On a $F=\{0\}$ et $E=G$ et $f=\psi$, donc $\|f^n\|<1$, ainsi iii implique ii.

ii⇒i La condition $\|f^n\|<1$ entraîne $\rho(f)<1$, or $f\in\mathscr{B}(E)$, donc $f\in\mathscr{B}_o(E)$, d'où ii implique i.

B. Caractérisation des éléments de $\mathscr{C}_0(E)$

1. Soit $f\in\mathscr{C}(E)$ et $u\in E$ tel que $\mathbf{Id_E}-f^*f=uu^*$.

(a) On a $\ker(\mathbf{Id_E}-f^*f)=\ker f_u=\mathrm{Vect}(u)^\perp$.
Soit $x\in F$, alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^k(x)\in\mathrm{Vect}(u)^\perp$, d'où $\Big(f^k(x)|x\Big)=0$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$.
Réciproquement, si $x\notin F$, soit k le plus petit entier tel que $f^k(x)\notin E_f$, alors d'après ce qui précède $k<n$ et $\Big(f^{k-1}(x)|x\Big)\neq 0$ ce qui est absurde.

(b) D'après la question **3.** de la partie **III.A**, $f\in\mathscr{C}_0(E)$ si, et seulement si, $F=\{0\}$. Mais on a pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, $\Big(f^k(x)|u\Big)=\Big(x|(f^k)^*(u)\Big)$, donc $F=\mathrm{Vect}\left(u,f^*(u),...,(f^*)^{n-1}(u)\right)^\perp$, donc $E=\mathrm{Vect}\left(u,f^*(u),...,(f^*)^{n-1}(u)\right)$. Donc $F=\{0\}$ si, et seulement si, $\left(u,f^*(u),...,(f^*)^{n-1}(u)\right)$ est une base de E.

2. Soit $x\in\mathrm{Vect}\left(u,f^*(u),...,(f^*)^{n-2}(u)\right)$ qui est de dimension $n-1$, d'après ce qui est précède, alors pour tout $k\in[\![1,n-2]\!]$, $\Big(f^k(x)|u\Big)=0$ et $f^k(x)\in E_f$, ce qui entraîne que

$$\|x\|=\|f(x)\|=...=\|f^{n-2}(x)\|=\|f^{n-1}(x)\|,$$

donc $\|f^k\|=1$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$ et $\|f^n\|<1$ puisque $f\in\mathscr{C}_o(E)$.

3. On a $\|f\|=1$, donc $f\in\mathscr{B}(E)$ et même $f\in\mathscr{B}_o(E)$ puisque $\|f^n\|<1$ et comme $\|f^{n-1}\|=1$, il existe $x\in E\setminus\{0\}$ tel que $\|x\|=\|f^{n-1}(x)\|$, alors $\left(x,f(x),...,f^{n-2}\right)$ sont dans E_f et $f^{n-1}(x)\notin E_f$, donc d'après la question 2.c de cette partie, $\left(x,f(x),...,f^{n-1}(x)\right)$ est une famille libre, donc c'est une base de E, comme $x,f(x),...,f^{n-2}(x)$ sont dans E_f, alors $\dim E_f\geq n-1$. Ce qui entraîne que $\mathrm{rg}\left(\mathbf{Id_E}-f^*f\right)\leq 1$, d'où $f\in\mathscr{C}(E)$, donc à $\mathscr{C}_o(E)$.

C. Étude d'une base adaptée à un élément de $\mathscr{C}_0(E)$ et de sa matrice de Gram

1. Soit x un vecteur non nul dont on a montré l'existence à la question **III. B.2.** c'est-à-dire tel que

$$\|x\|=\|f(x)\|=...=\|f^{n-1}(x)\|$$

Puisque $\|f^n\|<1$, on a $\|x\|>\|f^n(x)\|$. Soit $\delta=\|x\|^2-\|f(x)\|^2>0$. Si on pose $\nu_1=\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}x$, il est clair que ce vecteur répond à la question $(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$ est une base d'après **III.B.3**.
La matrice de f dans cette base est clairement une matrice compagnon C, dont le polynôme caractéristique est celui de f (il ne dépend pas de la base). Si le polynôme caractéristique de f est

$$\chi_f=T^n-a_{n-1}T^{n-1}-..--a_1T^1-a_0$$

alors il est clair que la matrice de f dans la base $(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$ est exactement la matrice C compagnon de χ_f.

2. (a) Soit X la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans une base orthonormale quelconque. Il est clair que

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = X^* X.$$

Donc si N est la matrice formée par les coordonnées des ν_i dans une base orthonormale ε de E, on a $\Omega = N^* N$.
N est donc la matrice de passage de la base ε à la base $\mathscr{V} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$. Soit M la matrice de f dans la base ε. Puisque C est la matrice de f dans la base $\mathscr{V}$, on a $C = N^{-1} M N$ et $NC = MN$. D'où

$$C^* \Omega C = C^* N^* N C = (NC)^*(NC) = (MN)^*(MN).$$

Or MN est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $f(\nu_i)$ dans la base ε, donc

$$C^* N C = (MN)^*(MN) = G(f(\nu_1), f(\nu_2), ..., f(\nu_n)).$$

(b) Calculons le terme général de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \Omega - C^* \Omega C$ en utilisant l'identité

$$(a|b) = \frac{1}{2}(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2)$$

et l'égalité iii. du **I.B.5.** qui fait intervenir un vecteur u tel que $\mathbf{Id_E} - f^* f = uu^*$, à savoir $\|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = (u|x)^2$ pour tout $x \in E$.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (\nu_i|\nu_j) - (f(\nu_i)|f(\nu_j)) \\ &= \frac{1}{2}\left((\|\nu_i + \nu_j\|^2 - \|f(\nu_i + \nu_j)\|^2) - (\|\nu_i\| - \|f(\nu_i)\|^2) - (\|\nu_j\|^2 - \|f(\nu_j)\|^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((u|\nu_i + \nu_j)^2 - (u|\nu_i)^2 - (u|\nu_j)^2\right) \end{aligned}$$

D'après ce qu'on a vu et par construction, tous les ν_i pour $1 \leq i \leq n-1$ sont dans E_f, qui est l'hyperplan vectoriel orthogonal de u, donc si i et j sont tous deux $\leq n-1$, il est clair que $a_{ij} = 0$. D'autre part, comme

$$(u|\nu_n)^2 = \|\nu_n\|^2 - \|f(\nu_n)\|^2 = \|f^{n-1}(\nu_1)\|^2 - \|f^n(\nu_1)\|^2 = \|\nu_1\|^2 - \|f^n(\nu_1)\|^2 = 1$$

et donc $(u|\nu_n) = 1$, on a pour $i \leq n-1$ et $j = n$,

$$a_{in} = \frac{1}{2}\left((u|\nu_i) + (u|\nu_n)\right)^2 - (u|\nu_i)^2 - (u|\nu_n)^2 = \frac{1}{2}\left((0 \pm 1)^2 - 0^2 - 1^2\right) = 0.$$

Pour finir, en revenant à sa définition, de la même façon, on a $a_{nn} = \|\nu_n\|^2 - \|f(\nu_n)\|^2 = 1$ (il est inutile de calculer les termes a_{nj} puisque A est clairement symétrique).
Finalement la matrice A a tous ses termes nuls à l'exception de $a_{nn} = 1$, elle est donc égale à $E_n E_n^*$.

IV

Résolution dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de l'équation à l'inconnue G : $G - C^* G C = H$

1. Puisque le polynôme caractéristique de C est P, et que toutes ses racines sont de module strictement inférieur à 1, on a $\rho(C) < 1$ donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\|C^m\| = \|(C^*)^m)\| < 1$ (on a utilisé les résultats obtenus en **I.C.** et en **I.B.1.b.**, on utilise aussi l'identification des matrices avec les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, et on utilise la norme euclidienne canonique).

Or si $A = C^*AC$, on a aussi $A = C^*(C^*AC)C$ et par récurrence immédiate, pour tout m entier positif $A = (C^*)^m AC^m$ et en particulier pour m tel que $\|C^m\| = \|(C^*)^m\| < 1$. Passant aux normes, on obtient

$$\|A\| \leq \|(C^*)^m\|\|A\|\|C^m\|,$$

donc

$$(1 - \|(C^*)^m\|\|C^m\|)\|A\| \leq 0.$$

Mais $(1 - \|(C^*)^m\|\|C^m\|) > 0$ et $\|A\| \geq 0$ donc cette inégalité n'est possible que si $\|A\| = 0$ et donc $A = 0$.

2. (a) On vient d'établir que l'endomorphisme l de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $A \mapsto A - C^*AC$ est injectif et comme on est en dimension finie, il est bijectif, donc toute matrice B possède un unique antécédent A par l, ce qui signifie qu'il existe une unique matrice A telle que $A - C^*AC = B$.

(b) On doit déjà établir la convergence de la série de matrices $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}}(C^*)^p BC^p$. En fait cette série est normalement convergente, car si m est un entier tel que $\|C^m\| = \|(C^*)^m\| = a < 1$, si $M = \displaystyle\max_{0\leq i<m} \|C^i\|$, pour tout $p = mq + r$ (division euclidienne de p par m : $0 \leq r < m$), on a

$$\|C^p\| = \|(C^m)^q C^r\| \leq a^q M = a^{\frac{mq+r}{m}} \frac{M}{a^{\frac{r}{m}}} \leq \frac{M}{a}\eta^p$$

avec $0 < \eta = a^{\frac{1}{m}} < 1$ (en particulier, $\eta^r > \eta^m$, puisque $r < m$, et donc $\dfrac{1}{\eta^r} \leq \dfrac{1}{\eta^m} = \dfrac{1}{a}$). Donc le terme général de la série qu'on étudie est majoré en norme ainsi :

$$\|(C^*)^p BC^p\| \leq \left(\frac{M}{a}\right)^2 \|B\|(\eta^2)^p$$

et la série géométrique dont le terme général est le membre de gauche de cette inégalité est convergente puisque sa raison η^2 est strictement inférieure à 1.
Ensuite, il suffit de vérifier que cette matrice A est bien solution de l'équation qu'on étudie :

$$\begin{aligned}
A - C^*AC &= \sum_{p=0}^{+\infty}(C^*)^p BC^p - C^*\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(C^*)^p BC^p\right) C \\
&= B + \sum_{p=1}^{+\infty}(C^*)^p BC^p - \sum_{p=0}^{+\infty}(C^*)^{p+1} BC^{p+1} \\
&= B + \sum_{p=1}^{+\infty}(C^*)^p BC^p - \sum_{p=1}^{+\infty}(C^*)^p BC^p \\
&= B
\end{aligned}$$

3. (a) La restriction de l'endomorphisme l de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ introduit en **IV.2.a**. au sous-espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est évidemment stable dans ce sous-espace, et l étant bijectif, l'unique antécédent G par l d'un élément H de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Il reste à vérifier que G est positif sous l'hypothèse que H est positif.
Or on a vu que $G = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(C^*)^p HC^p$, donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$X^*GX = \sum_{p=0}^{+\infty}(CX)^p)^* H(CX)^p$$

qui est la somme d'une série à termes tous positifs puisque H est positif, donc $X^*GX \geq 0$.
On peut remarquer, ce qui nous servira à la question suivante, que la somme de cette série à termes positifs ne peut être nulle que si tous les termes sont nuls.

(b) Si $X \in \ker G$, on a justement la somme de la série qui est nulle, donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(C^pX)^*H(C^pX) = 0$, ce qui implique (voir **I.A.5.**) que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $C^pX \in \ker H$. Donc i.⇒ii.
La réciproque ii.⇒i. est évidente en considérant cette même série.
ii.⇒iii. est évident.
iii.⇒ii. Puisque H est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, son polynôme minimal est de degré $\leq n$, et pour tout X, le sous-espace vectoriel engendré par les H^kX, $k \in \mathbb{N}$ est engendré par $(X, HX, ..., H^{n-1}X)$, donc si tous ces vecteurs sont nuls, il en est de même de tous les H^kX pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. D'après la question précédente, on est déjà sûr que G est symétrique et positive. D'autre part, l'équivalence entre i. et ii. est évidente puisque les deux conditions signifient que $\mathrm{Vect}(U, C^*U, ..., (C^*)^{n-1}U)^\perp = \{0\}$.
Remarquons enfin que, pour deux vecteurs Y et Z de $\mathbb{R}^n$, on a $(Y|Z) = (Z|Y) = Z^*Y$. De ce fait, la matrice UU^* étant positive, en utilisant **I.A.5.**, on a les équivalences

$$\begin{aligned}(X|U) = (CX|U) = ... = (C^{n-1}X|U) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad U^*X = U^*CX = ... = U^*C^{n-1}X = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad UU^*X = UU^*CX = ... = UU^*C^{n-1}X = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X \in \ker G.\end{aligned}$$

Il en ressort clairement que i.⇔ $\ker G = \{0\}$, ce qui correspond à G définie positive (puisqu'on sait que $G \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R}^n)$).

5. (a) On sait déjà que $\Omega \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R}^n)$. Soit $X \in \ker \Omega$, on a donc d'après **IV.3.b.**, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^kX \in \ker(E_nE_n^*)$, et d'après **I.A.5.**, $\forall k \in \mathbb{N}$, $E_n^*C^kX = (C^kX|E_n) = 0$.
Si $X^* = (x_1, x_2, ..., x_n)$, puisque $(X|E_n) =$, c'est que $x_n = 0$. Puis on a $(CX)^* = (0, x_1, ..., x_{n-1})$, donc de $(CX|E_n) = 0$ on déduit $x_{n-1} = 0$. De proche en proche, ou par une récurrence immédiate, on en déduit que tous les x_i sont nuls donc $X = 0$ et donc $\ker \Omega = \{0\}$. Ω est donc bien définie positive

(b) D'après la question **IV.4.** on peut donc affirmer que $(E_n, C^*E_n, ..., (C^*)^{n-1}E_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et donc il existe un unique n-uple de réels $(\lambda_o, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$ tel que $U = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (C^*)^k E_n$. Si Q est le polynôme de degré ≤ 1 défini par $Q = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k T^k$, on peut donc écrire que $U = Q(C^*)E_n = (Q(C))^*E_n$.
Pour obtenir l'expression de G, on peut reporter cette expression de U dans la série définissant G, et on peut aussi vérifier que l'expression proposée correspond à une solution donc est la solution de l'équation $G - C^*GC = UU^*$. Dans les deux cas, on utilisera que $Q(C)$ commute avec C ou C^k et que $(Q(C))^*$ commute avec C^* ou $(C^*)^k$.

(c) On utilise le résultat de **I.A.6** (dans les deux sens).
Supposons que $H = G - C^*GC$ est symétrique positive : il existe n vecteurs $(U_1, U_2, ..., U_n)$ tels que $H = \sum_{i=1}^{n} U_iU_i^*$.
Mais à chacun de ces vecteurs U_i correspond un unique polynôme Q_i de degré $\leq n-1$ tel que l'unique solution de $X - C^*XC = U_iU_i^*$ est $G_i = (Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)$. Il est clair que $\sum_{i=1}^{n} G_i$ est solution de $X - C^*XC = H$, et par unicité de cette solution, $G = \sum_{i=1}^{n} G_i$.
Réciproquement, si $G = \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)$, on pose $G_i = (Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)$ et $U_i = (Q_i(C))^*E_n$, et on peut remonter les calculs : on obtient facilement que G_i est la solution de $X - C^*XC = U_iU_i^*$, et par linéarité de l, G est tel que $G - C^*GC = \sum_{i=1}^{n} U_iU_i^*$, donc $G - C^*GC$ est symétrique positive.

V

A. Existence d'un élément f de $\mathscr{C}_0(E)$ tels que $\chi_f = P$

1. D'après ce qu'on a vu dans la partie **II.**, on sait construire une matrice M triangulaire inférieure dont les valeurs propres sont imposées dans $[-1,1]$, et qui est dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$. Si on impose en plus que toutes ses valeurs propres soient les racines de P avec leur ordre de multiplicité, elles seront dans $]-1,1[$, et le rayon spectral de M est alors plus petit que 1 : on construit ainsi une matrice $M \in \mathscr{C}_o(\mathbb{R}^n)$ dont le polynôme caractéristique est P.
Pour un espace euclidien quelconque, il suffit de fixer une base orthonormée, et d'utiliser l'isomorphisme d'espace euclidien entre E et $\mathbb{R}$ que définit le choix de cette base : il suffit donc de prendre l'endomorphisme f dont la matrice dans cette base est la matrice M qu'on vient de construire. Son polynôme caractéristique est égal à celui de M et on a bien $\chi_f = P$.

2. (a) On a vu que Ω est symétrique définie positive. On sait qu'il existe une matrice R inversible telle que $= \mathbb{R}^*R$, et si $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ est la base définie à partir d'une base orthonormale $\varepsilon = (e_1, e_2, ..., e_n)$ par sa matrice de passage R, (R est la matrice de passage de ε à v, cette dernière égalité exprime précisément que $\Omega = G(v_1, v_2, ..., v_n)$.

(b) Le calcul de **III.C.2.a.** est toujours valable, et montre que si f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ est C, on a $C^*\Omega C = G(f(v_1), ..., f(v_n))$. De l'égalité $\Omega - C^*\Omega C = E_n E_n^*$, on peut déduire que pour tous i, j on a $(v_i|v_j) - (f(v_i|f(v_j)) = 0$ sauf pour $i = j = n$: dans ce cas, on a $\|v_n\|^2 - \|f(v_n)\|^2 = 1$.
Soit $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. Matriciellement, si X représente les coordonnées de x dans la base orthonormale ε de E dont on est parti, on peut écrire $X = R\Lambda$, avec $\Lambda^* = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.
On a $\|x\|^2 = \|X\|^2 = X^*X = \Lambda^*R^*RA = \Lambda^*\Omega\Lambda$. De même, puisque la matrice de f dans la base v est C, les coordonnées de $f(x)$ dans la base v sont $C\Lambda$ et dans la base ε, $f(x)$ a pour coordonnées $RC\Lambda$, donc $\|f(x)\|^2 = \Lambda^*C^*\Omega CA$. On en déduit que pour tout $x \in E$, de coordonnées Λ dans la base v,

$$\|2\|^2 - \|f(x)\|^2 = \Lambda^*(\Omega - C^*\Omega C)\Lambda = \Lambda^* E_n E_n^* \Lambda = \lambda_n^2$$

On peut en déduire que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x, donc $\|f\| \leq 1$ et $f \in \mathscr{B}(E)$.
D'autre part, $\rho(f) < 1$ par construction.
Il reste à vérifier que $\mathrm{rg}(\mathbf{Id_E} - f^*f) \leq 1$, ce qui est clair puisque la restriction de f à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_{n-1})$ est clairement une isométrie d'après le calcul qu'on vient de faire, donc cet hyperplan est inclus dans $E_f = \ker(\mathbf{Id_E} - f^*f)$. On a bien construit un endomorphisme de E de polynôme caractéristique P, et qui est dans $\mathscr{C}_o(E)$.

3. i.⇒ii.⇒iii. sont des implications évidentes (des endomorphismes semblables ont même polynôme caractéristique). La seule chose à vérifier est l'implication iii.⇒i.
Or si f et g ont même polynôme caractéristique P, et ce polynôme correspond à la même matrice compagnon C. L'étude du **III.C.** permet de construire pour f une base v et une matrice Ω, pour g une base v' et une matrice Ω', qui vérifient toutes deux

$$\Omega - C^*\Omega C = \Omega' - C^*\Omega' C = E_n E_n^*$$

donc $\Omega = \Omega'$. Les bases v et v' ont donc même matrice de Gram et on sait que cette propriété caractérise les bases isométriques. Il existe donc une isométrie $r \in \mathscr{O}(E)$ telle que $r(v) = v'$ et on s'aperçoit en comparant leurs matrices dans la base v' que $g = rfr^{-1}$.

B. Maximum de $\|Q(g)\|$ lorsque $\|g\| \leq 1$ et $P(g) = 0$

1. (a) Puisque $P(g) = 0$, on a $g^n = a_o\mathbf{Id_E} + a_1 g + .. + a_{n-1}g^{n-1}$ donc si $g(x) = x' = \sum_{i=1}^{n} x'_i g^{i-1}(u)$, si on pose $X'^* = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, alors $X' = CX$. Si U est la matrice formée par les coordonnées des vecteurs $(u, g(u), ..., g^{n-1}(u))$ dans une base ε orthonormale de E, (lorsque U est inversible, U est la matrice de passage entre ε et $(u, g(u), ..., g^{n-1}(u))$ qui est alors une base, mais rien ne permet d'affirmer que U est

inversible, ni que $(u, g(u), ..., g^{n-1}(u))$ est une base!), les coordonnées de x dans ε sont UX, celles de $x' = g(x)$ sont $UX' = UCX$, par une récurrence immédiate, et de la même façon, les coordonnées de $g^i(x)$ sont donc UC^iX. D'autre part, on a $G = U^*U$, par définition.
Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[T]$, on a $Q(g) = \tilde{Q}(g)$, $\tilde{Q}$ étant le reste de la division euclidienne de Q par P, et c'est donc un polynôme de degré $\leq n-1$. On peut écrire $Q(g) = \tilde{Q}(g) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k g^k$.
Remarquons que de la même façon, on a pour les mêmes coefficients α_k, et pour la même raison

$$Q(C) = \tilde{Q}(C) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k C^k.$$

On est maintenant armé pour calculer $\|Q(g)(x)\|^2$:

$$\begin{aligned} \|Q(g)(x)\|^2 &= \left\|\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k g^k(x)\right\|^2 = \left\|\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k UC^kX\right\|^2 = \|U\tilde{Q}(C)X\|^2 = \|UQ(C)X\|^2 \\ &= (UQ(C)X)^*(UQ(C)X) \\ &= (Q(C)X)^*U^*U(Q(C)X) \\ &= (Q(C)X)^*G(Q(C)X) \end{aligned}$$

(b) En appliquant la formule précédente pour $Q = T$, on obtient

$$\|g(x)\|^2 = X^*C^*GCX,$$

et encore plus simplement, pour $Q = 1$, on obtient $\|x\|^2 = X^*GX$. On étudie le signe de $X^*(G - C^*GC)X$. On a

$$X^*(G - C^*GC)X = X^*GX - X^*C^*GCX = \|x\| - \|g(x)\|^2.$$

Or par hypothèse, on a $\|g\| \leq 1$ donc cette dernière quantité est toujours positive, et $G - C^*GC$ est bien positive (il est évident qu'elle est symétrique).

(c) D'après **V.B.1.a**, puisque $u = 1u + 0g(u) + ... + 0g^{n-1}(u)$, pour $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = E_1$, on a, pour tout $Q \in \mathbb{R}[T]$, on a $\|Q(g)(u)\|^2 = (Q(C)U)^*G(Q(C)U)$, c'est-à-dire

$$\|Q(g)(u)\|^2 = (Q(C)E_1)^*G(Q(C)E_1) \tag{2}$$

On a vu en **V.B. 1.b** que $G - C^*GC \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R}^n)$, donc d'après **IV.5.c**, il existe n polynômes $Q_1, Q_2, ..., Q_n \in \mathbb{R}[T]$ tels que $G = \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)$.
Donc on a

$$\begin{aligned} \|Q(g)(u)\|^2 &= (Q(C)E_1)^*\left(\sum_{i=1}^{n} (Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)\right)(Q(C)E_1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (Q(C)E_1)^*(Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)(Q(C)E_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C)Q(C)E_1)^*\Omega Q_i(C)Q(C)E_1 \end{aligned}$$

D'où :

$$\|Q(g)(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C)Q(C)E_1)^* \Omega Q_i(C)Q(C)E_1 \tag{3}$$

Or la matrice Ω est (par définition, voir **IV.5**) l'unique matrice vérifiant $\Omega - C^*\Omega C = E_n E_n^*$. D'après la partie **III.C**, Ω est donc la matrice de Gram d'une base $v = (v_1, v_2, ..., v_n) = (v_1, f(v_1), ..., f(v_1))$, où v_1 est un vecteur de E qui vérifie

$$\begin{cases} \|f^{n-1}(v_1)\| = \|v_1\| \\ \|v_1\|^2 - \|f^n(v_1)\|^2 = 1 \end{cases}$$

(et dans laquelle la matrice de f est justement C.)
On peut à nouveau appliquer **V.B.1.a** à ce vecteur v_1, et à l'endomorphisme f, comme on l'a fait au début de cette question : la formule (2) qu'on a obtenue avec u et g quelconques (on a bien, bien sûr $P(f) = 0$, puisque P est le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de f) : $\|Q(g)(u)\|^2 = (Q(C)E_1)^* G(Q(C)E_1)$ s'écrit ici (puisqu'on a $\Omega = G(v_1, f(v_1), ..., f^{n-1}(v_1))$)

$$\forall Q \in \mathbb{R}[T], \ \ \|Q(f)(v)\|^2 = (Q(C)E_1)^* \Omega (Q(C)E_1) \tag{4}$$

Appliquons ceci en particulier pour chaque polynôme $Q_i.Q = Q.Q_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \ ((Q_iQ)(C)E_1)^* \Omega (Q_iQ)(C)E_1) = \|QQ_i(f)(v_1)\|^2 = \|Q(f)(Q_i(f)(v_1)\|^2 \tag{5}$$

Il suffit alors de poser $u_i = Q_i(f)(v_1)$ (ces vecteurs sont indépendants de Q) pour obtenir, à partir des relations (2) et (3) :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[T], \ \ \|Q(g)(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Q(f)(u_i)\|^2$$

2. Soit $Q \in \mathbb{R}[T]$, on choisit $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\|Q(g)\| = \|Q(g)(u)\|$ (c'est toujours possible par compacité de la boule unité de E, qui est de dimension finie).
D'après la question précédente **V.B.1.c**, il existe $u_1, u_2, ..., u_n \in E$ tels que

$$\forall S \in \mathbb{R}[T], \ \ \|S(g)(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|S(f)(u_i)\|^2 \tag{6}$$

En particulier, en appliquant ceci au polynôme Q, on a

$$\|Q(g)\|^2 = \|Q(g)(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Q(f)(u_i)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|Q(f)\|^2 \|u_i\|^2 = \|Q(f)\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \tag{7}$$

Une dernière astuce consiste à appliquer (6) avec le polynôme constant $S = 1$ (et donc $S(g) = S(f) = \mathbf{Id_E}$).

On a donc $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$, et en reportant dans ce qu'on vient d'obtenir

$$\|Q(g)\|^2 \leq \|Q(f)\|^2 \|u\|^2 = \|Q(f)\|^2$$

puisque $\|u\| = 1$. On a bien prouvé

$$\|Q(g)\| \leq \|Q(f)\|.$$

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●